3

Diszkrét idejű Fourier transzformáció

Általános összefüggések

	$x[k]$	$X(e^{j\vartheta})$
1	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\vartheta})\, e^{j\vartheta k}\, d\vartheta$	$\boldsymbol{F}\{x[k]\}$
2	$\boldsymbol{F}^{-1}\{X(e^{j\vartheta})\}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, e^{-j\vartheta k}$; $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert x[k]\rvert < \infty$
3	$x[k-r]$, $r \in \mathbf{Z}$	$e^{-j\vartheta r} X(e^{j\vartheta})$
4	$x[k]\, e^{j\Theta k}$	$X(e^{j(\vartheta-\Theta)})$
5	$x[k]\{A\cos\Theta k + B\sin\Theta k\}$	$\frac{A - jB}{2} X(e^{j(\vartheta-\Theta)}) + \frac{A + jB}{2} X(e^{j(\vartheta+\Theta)})$
6	$k\, x[k]$	$j\frac{dX(e^{j\vartheta})}{d\vartheta}$
7	$x\left(\frac{k}{m}\right)$; $m \in \mathbf{N}$	$X(e^{jm\vartheta})$
8	$E_x \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert x[k]\rvert^2$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \lvert X(e^{j\vartheta})\rvert^2\, d\vartheta$
9	$x[k] * y[k] \equiv \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]\, y[k-i]$	$X(e^{j\vartheta})\, Y(e^{j\vartheta})$
10	$x[k]\, y[k]$	$X(e^{j\vartheta}) * Y(e^{j\vartheta}) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\lambda})\, Y(e^{j(\vartheta-\lambda)})\, d\lambda$

Diszkrét idejű Fourier transzformáció

Konkrét jelek

	$x[k]$	$X(e^{j\vartheta})$
11	$\delta[k]$	1
12	$\delta[k-r]$; $r \in \mathbf{Z}$	$e^{-j\vartheta r}$
13	$\varepsilon[k]\, a^k$; $\lvert a\rvert < 1$	$\frac{1}{1 - a\, e^{-j\vartheta}}$
14	$a^{\lvert k\rvert}$; $\lvert a\rvert < 1$	$\frac{1 - a^2}{1 + a^2 - 2a\cos\vartheta}$
15	1	$2\pi\delta(\vartheta)$; $\lvert\vartheta\rvert < \pi$
16	$\varepsilon[k]$	$\pi\delta(\vartheta) + \frac{1}{1 - e^{-j\vartheta}}$; $\lvert\vartheta\rvert < \pi$
17	$\operatorname{sgn} k$	$\frac{1}{j\,\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2}}$
18	$e^{j\Theta k}$	$2\pi\delta(\vartheta - \Theta)$; $\lvert\vartheta\rvert < \pi, \lvert\Theta\rvert < \pi$
19	$\varepsilon[k]\, e^{j\Theta k}$	$\pi\delta(\vartheta - \Theta) + \frac{1}{1 - e^{-j(\vartheta-\Theta)}}$; $\lvert\vartheta\rvert < \pi$, $\lvert\Theta\rvert < \pi$
20	$\varepsilon[k+L] - \varepsilon[k-(L+1)]$	$\frac{\sin\frac{2L+1}{2}\vartheta}{\sin\frac{\vartheta}{2}}$
21	$\{\varepsilon[k+L] - \varepsilon[k]\}\left\{1 + \frac{k}{L}\right\} + \{\varepsilon[k] - \varepsilon[k-L]\}\left\{1 - \frac{k}{L}\right\}$	$\frac{1}{L}\left(\frac{\sin\frac{L\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}}\right)^2$

1

Folytonos idejű Fourier transzformáció

Általános összefüggések

	$x(t)$	$X(\mathrm{j}\omega)$
1.	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\mathrm{j}\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega$	$\boldsymbol{F}\{x(t)\}$
2.	$\boldsymbol{F}^{-1}\{X(\mathrm{j}\omega)\}$	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t\,;\quad \int_{-\infty}^{\infty}\lvert x(t)\rvert\,\mathrm{d}t<\infty$
3.	$x(t-T)$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}X(\mathrm{j}\omega)$
4.	$x(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega t}$	$X(\mathrm{j}(\omega-\Omega))$
5.	$x(t)\{A\cos\Omega t+B\sin\Omega t\}$	$\frac{A-\mathrm{j}B}{2}X(\mathrm{j}(\omega-\Omega))+\frac{A+\mathrm{j}B}{2}X(\mathrm{j}(\omega+\Omega))$
6.	$t\,x(t)\,;\quad \int_{-\infty}^{\infty}\lvert t\,x(t)\rvert\,\mathrm{d}t<\infty$	$\mathrm{j}\frac{\mathrm{d}X(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}\omega}$
7.	$x'(t)$	$\mathrm{j}\omega\,X(\mathrm{j}\omega)$
8.	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$\frac{1}{\mathrm{j}\omega}X(\mathrm{j}\omega)+\pi X(\mathrm{j}0)\,\delta(\omega)$
9.	$x\left(\frac{t}{m}\right)$	$\lvert m\rvert\,X(\mathrm{j}m\omega)$
10	$E_x\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\lvert x(t)\rvert^2\,\mathrm{d}t$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lvert X(\mathrm{j}\omega)\rvert^2\,\mathrm{d}\omega$ Parseval-tétel
11	$x(t)*y(t)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\,y(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$X(\mathrm{j}\omega)\,Y(\mathrm{j}\omega)$ Konvolúció
12	$x(t)\,y(t)$	$X(\mathrm{j}\omega)*Y(\mathrm{j}\omega)\equiv\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\mathrm{j}\lambda)\,Y(\mathrm{j}(\omega-\lambda))\,\mathrm{d}\lambda$

Folytonos idejű Fourier transzformáció

Konkrét jelek

	$x(t)$	$X(\mathrm{j}\omega)$
13	$\delta(t)$ <->	1
14	$\delta(t-T)$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}$
15	$\varepsilon(t)\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\,;\quad \alpha>0$	$\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}\omega}$
16	$\varepsilon(t)\,t\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\,;\quad \alpha>0$	$\frac{1}{(\alpha+\mathrm{j}\omega)^2}$
17	$p_T(t)\equiv\varepsilon(t+T)-\varepsilon(t-T)\,;\quad T>0$	$2T\frac{\sin\omega T}{\omega T}$
18	$\mathrm{e}^{-\alpha\lvert t\rvert}\,;\quad \alpha>0$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$
19	1	$2\pi\delta(\omega)$
20	$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega t}$	$2\pi\delta(\omega-\Omega)$
21	$A\cos\Omega t+B\sin\Omega t$	$\pi[A+\mathrm{j}B]\delta(\omega+\Omega)+\pi[A-\mathrm{j}B]\delta(\omega-\Omega)$
22	$\varepsilon(t)$	$\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}$
23	$\operatorname{sgn} t$	$\frac{2}{\mathrm{j}\omega}$
24	$\frac{\sin\Omega t}{\Omega t}$	$\frac{\pi}{\Omega}p_\Omega(\omega)\equiv\frac{\pi}{\Omega}\{\varepsilon(\omega+\Omega)-\varepsilon(\omega-\Omega)\}$
25	$\mathrm{e}^{-(\alpha t)^2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\mathrm{e}^{-(\omega/2\alpha)^2}$
26.	$\sum_{p=-\infty}^{\infty}x(pT)\,S\left(\frac{t}{T}-p\right);\quad S(u)\equiv\frac{\sin\pi u}{\pi u}$	$X(\mathrm{j}\omega)=0\,,\ \lvert\omega\rvert>\Omega\equiv\frac{\pi}{T}$
27	$x(t)=0\,,\ \lvert t\rvert>T\equiv\frac{\pi}{\Omega}$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(\mathrm{j}n\Omega)\,S\left(\frac{\omega}{\Omega}-n\right);\quad S(u)\equiv\frac{\sin\pi u}{\pi u}$

nem fogjuk használni annyira

2

Folytonos idejű Laplace transzformáció

Általános összefüggések

	$x(t)$	$X(s)$
1	$L^{-1}\{X(s)\}$	$\int_{-0}^{\infty} x(t)\,e^{-st}\,dt$
2	$\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)\,e^{st}\,ds$	$L\{x(t)\}$
3	$x'(t) \equiv x^{(1)}(t)$	$s\,X(s) - x(-0)$
4	$x^{(n)}(t);\ n \in \mathbf{N}$	$s^n X(s) - \sum_{i=0}^{n-1} x^{(i)}(-0)\,s^{n-1-i}$
5	$\int_{-0}^{t} x(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$
6	$e^{-\alpha t}\,x(t)$	$X(s+\alpha)$
7	$\varepsilon(t-T)\,x(t-T)$	$e^{-sT}X(s)$
8	$-t\,x(t)$	$\frac{dX(s)}{ds}$
9	$x\left(\frac{t}{m}\right);\quad m>0$	$m\,X(ms)$
10	$x(t)*y(t) \equiv \int_{-0}^{t} x(\tau)\,y(t-\tau)\,d\tau$	$X(s)Y(s)$
11	$\varepsilon(t)\sum_{k=1}^{n}\frac{P(p_k)}{Q_k(p_k)}e^{p_k t}$	$\frac{P(s)}{Q(s)};\quad \lim_{s\to\infty}\frac{P(s)}{Q(s)}=0,$ $Q(p_k)=0,\ \ Q_k(s)=\frac{Q(s)}{s-p_k},\ \ Q_k(p_k)\neq 0$
12	$x(+0)$	$\lim_{s\to\infty}\{s\,X(s)\}$
13	$\lim_{t\to\infty} x(t)$	$\lim_{s\to 0}\{s\,X(s)\};\ \frac{1}{X(s)}\neq 0,\ \mathrm{Re}\{s\}\geq 0$
14	$\varepsilon_T(t)\,x_T(t) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} x_T(t-kT);$ $x_T(t)=0,\ t<0,\ t>T$	$\frac{X_T(s)}{1-e^{-sT}}$

Folytonos idejű Laplace transzformáció

Konkrét jelek

	$x(t)$	$X(s)$
15	$\delta(t)$	1
16	$\delta(t-T);\quad T>0$	e^{-sT}
17	$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s}$
18	$\varepsilon(t-T);\quad T>0$	$e^{-sT}\frac{1}{s}$
19	$\varepsilon(t)\,t$	$\frac{1}{s^2}$
20	$\varepsilon(t)\frac{t^n}{n!};\quad n\in\mathbf{N}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
21	$\varepsilon(t)\,e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$
22	$\varepsilon(t)\{A\cos\Omega t + B\sin\Omega t\}$	$\frac{A\,s+B\,\Omega}{s^2+\Omega^2}$
23	$e^{-\alpha t}$ $\frac{1}{\Omega}\varepsilon(t)\sin\Omega t$	$\frac{1}{s^2+2\alpha s+\beta^2};\quad \Omega^2=\beta^2-\alpha^2>0$
24	$\frac{1}{2\gamma}\varepsilon(t)\left\{e^{-(\alpha-\gamma)t}-e^{-(\alpha+\gamma)t}\right\}$	$\frac{1}{s^2+2\alpha s+\beta^2};\quad \gamma^2=\alpha^2-\beta^2>0$
25	$\varepsilon(t)\,t\,e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(s+\alpha)^2}=\frac{1}{s^2+2\alpha s+\beta^2};\quad \alpha=\beta$
26	$\varepsilon(t)\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$
27	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$	$\frac{1}{s^{3/2}}$
28	$\frac{1}{2}\varepsilon(t)\sqrt{\frac{T}{\pi t^3}}\,e^{-T/4t};\quad T>0$	$e^{-\sqrt{sT}}$
29	$-\ln\gamma t;\quad \gamma\approx 1.781$	$\frac{1}{s}\ln s$

4

Diszkrét idejű Laplace transzformáció (z-transzformáció)

Általános összefüggések

	$x\{k\}$	$X(z)$
1	$\mathbf{Z}^{-1}\{X(z)\}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,z^{-k}$
2	$\varepsilon[k]\dfrac{1}{2\pi j}\oint_{\lvert z\rvert=r_1} X(z)\,z^{k-1}\,dz$	$\mathbf{Z}\{x[k]\}$
3	$q^k\,x[k]$	$X\left(\dfrac{z}{q}\right)$
4	$\dfrac{\partial x[k,q]}{\partial q}$	$\dfrac{\partial X(z,q)}{\partial q}$
5	$\varepsilon[k-r]\,x[k-r];\quad r\in\mathbf{N}$	$z^{-r}X(z)$
6	$x^{(1)}[k]\equiv x[k-1]$	$z^{-1}X(z)+x[-1]$
7	$x^{(2)}[k]\equiv x[k-2]$	$z^{-2}X(z)+x[-2]+x[-1]z^{-1}$
8	$x[k-r];\quad r\in\mathbf{N}$	$z^{-r}X(z)+\sum_{i=1}^{r}x[-i]\,z^{-r+i}$
9	$x'[k]\equiv x[k+1]$	$z\,X(z)-x[0]\,z$
10	$k\,x[k]$	$-z\dfrac{dX(z)}{dz}$
11	$k^n\,x[k];\quad n\in\mathbf{N}$	$\left\{-z\dfrac{d}{dz}\right\}^n X(z)$
12	$x[0]$	$\lim_{z\to\infty} X(z)$
13	$x[\infty]$	$\lim_{z\to 1}\{(z-1)X(z)\};\quad \dfrac{1}{X(z_i)}=0,\ \lvert z_i\rvert>1$
14	$x[k]*y[k]\equiv\sum_{p=0}^{k}x[p]\,y[k-p]$	$X(z)\,Y(z)$
15	$\varepsilon[k]\sum_{i=1}^{n}\dfrac{P(q_i)}{Q_i(q_i)}q_i^k$	$z\dfrac{P(z)}{Q(z)};\quad \lim_{z\to\infty}\dfrac{P(z)}{Q(z)}=0,$ $Q(q_i)=0,\ Q_i(z)=\dfrac{Q(z)}{z-q_i},\ Q_i(q_i)\neq 0$

Diszkrét idejű Laplace transzformáció (z-transzformáció)

Konkrét jelek

	$x\{k\}$	$X(z)$
16	$\delta[k]$	1
17	$\delta[k-r];\quad r\in\mathbf{N}$	z^{-r}
18	$\varepsilon[k]$	$\dfrac{z}{z-1}$
19	$\varepsilon[k-r];\quad r\in\mathbf{N}$	$z^{-r}\dfrac{z}{z-1}\equiv\dfrac{z}{z^r(z-1)}$
20	$\varepsilon[k]\,q^k$	$\dfrac{z}{z-q}$
21	$\varepsilon[k]\{A\cos\Theta k+B\sin\Theta k\}$	$\dfrac{A\{z^2-z\cos\Theta\}+B\,z\sin\Theta}{z^2-2z\cos\Theta+1}$
22	$\varepsilon[k]\,k\,q^{k-1}$	$\dfrac{z}{(z-q)^2}$
23	$\varepsilon[k]\dfrac{k(k-1)}{2}q^{k-2}$	$\dfrac{z}{(z-q)^3}$
24	$\varepsilon[k]\dfrac{k!}{m!(k-m)!}q^{k-m};\quad m\in\mathbf{N}$	$\dfrac{z}{(z-q)^{m+1}}$
25	$\varepsilon[k]\,k$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
26	$\varepsilon[k]\,k^2$	$\dfrac{z^2+z}{(z-1)^3}$
27	$\varepsilon[k]\,k^3$	$\dfrac{z^3+4z^2+z}{(z-1)^4}$
28	$\varepsilon[k]\,k^4$	$\dfrac{z^4+11z^3+11z^2+z}{(z-1)^5}$
29	$\sum_{i=0}^{\infty}\dfrac{c^i}{i!}\delta[k-i]$	$e^{c/z}$